

(Opowieści andsola)

Po co komplikujecie
czyli
Aksjomaty Peano

Dzień dobry. Czy mogę?

Na części, na której nie siedzę – czemu nie?.

Nie zamierzam cię rozplaszczyć. Chcę po prostu pogadać z kimś. Dzień jest taki miły. Mam na imię Lidka.

Wierzę.

Wiesz, ale ja nie wierzę! Skąd tyle sympatii?

Nie lubię jak mi przerywają pracę.

Ale przysiadłam się, bo widziałam, że się wpatrywałeś w to drzewo. Jesteś biologiem?

Matematykiem. Jakie drzewo? Ach, to... Nie widziałem go. Wyobrażałem sobie, że tu jest morze.

Morze? Czemu właśnie morze?

Nie wiem. Może dlatego, że wtedy się skupiam. I ma dużą powierzchnię, można pisać na nim wiele rzeczy.

Pisać na morzu?

Nie. Na płaszczyźnie, którą sobie wyobrażam.

Ach, przygotowujesz lekcje...

Nie.

Co za skomplikowany człowiek. Ostatnia próba kontaktu między cywilizacjami. Po-wiesz jak masz na imię?

Powiem. Leszek.

Leszku, miałam dobrą intuicję.

Intuicja ci mówiła, że jestem Leszek?

Moja intuicja nie jest głośnikiem, nie mówi do mnie. Ona sprawiła, że się zatrzymałam przy twojej ławce. Bo właśnie chcę spotkać matematyka.

Równanie kwadratowe dla córki?

Nie musisz rozmawiać ze mną jakbym wyglądała na blondynkę.

Przecież jesteś blondynką.

O, cud! Zauważyłeś mnie! Tak, wyglądam na blondynkę, jestem blondynką i radzę sobie z materiałem szkolnym. A nawet z testem chi kwadrat, bo go używałam do znudzenia w pracy magisterskiej. Socjologia.

A ja nigdy nie używałam chi kwadrat i jak słyszę chi to mnie już boli.

Chi, chi, chi... Słuchaj, mam problem. Siostrzenica znalazła w Internecie aksjomaty Peano. A że w rodzinie jestem jedyną, która odróżnia parabolę od hiperboli, przysłała do mnie, żebym wyjaśniła czemu tyle dziwnego gadania o tak prostej sprawie jak liczby naturalne.

Może dlatego, że to nie jest prosta sprawa?

A co jest skomplikowanego w jeden dwa trzy i tak dalej?

I tak dalej.

Zwrot „i tak dalej”? Czy będzie lepiej jak to zapiszę trzykropkiem?

Chyba będzie krócej ale gorzej. A jak będziesz czytała te trzy kropki?

I tak dalej.

No to nie będzie gorzej. Słuchaj, osiemnaście, czterdzieści, dwieście i tak dalej. Co mam na myśli gdy mówię „i tak dalej”?

No nie wiem skąd wzięłaś te liczby.

Z pamięci. A ty skąd wzięłaś twoje jeden dwa trzy?

Myślałam, że mi coś wyjaśnisz, a ty mi zaciemniasz. Nie chcesz mi pomóc?

Jak dotychczas nikt mnie nie prosił o pomoc.

Przecież powiedziałam, że mam problem!

A kto nie ma. Ale to była deklaracja, a nie prośba o pomoc. Ja na przykład mogę oświadczyć, że mam wątrobę, ale to wcale nie znaczy, że chcę, żeby ktoś coś z nią robił.

Nie umiesz czytać gestów. Gdy blondynka patrzy na ciebie pytająco i mówi, że ma problem z aksjomatami Peano, to znaczy, że oczekuje pomocy.

Nie wpadło mi to do głowy. Dobrze, pomogę ci. Czy rozumiesz czemu nie rozumiem trzykropka?

Chyba robisz to na złość, przecież po „jeden dwa trzy” każde dziecko rozumie co znaczy „i tak dalej”.

Umówmy się, że jestem dzieckiem i ty mnie pytasz co znaczy „i tak dalej”.

Leszku, jeśli mówię jeden dwa trzy to co znaczy „i tak dalej”?

Chyba znaczy **jeden** dwa trzy **jeden** dwa trzy **jeden** dwa trzy i tańczymy walca.

Och.

Ale wolę **raz** dwa trzy **raz** dwa trzy.

Przecież żadne dziecko nie pomyśli o walcu kiedy mówię o liczeniu.

Jestem dzieckiem i właśnie pomyślałam.

No dobrze, chyba jest jakiś prosty sposób, żeby powiedzieć: „idziemy dalej, bez powtórzeń”?

Owszem. Aksjomaty Peano.

Chwileczkę. Jeśli policzę do czterdziestu i powiem „i tak dalej”, ciągle będziesz miał wątpliwości o co chodzi?

Dużo więcej niż przedtem. Najpierw pomyślę, że może chodzi ci o liczenie sekund, czyli po sześćdziesiąt będzie jeden dwa trzy. A poza tym jak będzie tyle liczb, wprowadzisz jakiś zapis w stylu notacji dziesiętnej i wtedy dopiero sprawy się skomplikują.

Rozumiem. Więc muszę powiedzieć, że liczby nie wracają do początku?

Ani na bok, ani nie przeskakują i w ogóle zachowują się przyzwoicie. I musiałybyś zrobić mnóstwo zakazów, bo w matematyce jak coś nie jest zakazane, to wolno to robić. Łatwiej powiedzieć **co** wolno robić. Aksjomaty Peano. Przy okazji, te powroty nazywamy cyklami. Jak weźmiesz te aksjomaty, nie będzie cykli.

Rozumiem zakaz cykli, ale kto by chciał przeskakiwać?

Ja. Jak nie zabroniono, to dozwolono. Jeden dwa trzy dwadzieścia cztery dwadzieścia siedem.

A co to za wygłup?

Żaden wygłup. Wiek osób w rodzinie sąsiada.

Jeden dwa trzy? Biedna kobieta.

Wygląda na to, że przyznajesz, że przykład ma sens.

Więc chodzi o obronę przed możliwymi dziwactwami?

Dokładnie. Powiedz mi jakieś polskie słowo, które by najlepiej opisało zbiór liczb naturalnych.

Hmmm... poczekaj... kolejka?

Świetnie. Ktoś jest pierwszy i za nim nie ma dwóch osób, jest tylko jedna. Czyli następna. Weź cały lud stojący w kolejce, oznacz go w jakiś prosty sposób, na przykład N i powiedz, że masz określoną w N funkcję „kolejny”. Jeśli weźmiesz osobnika n , to $k(n)$ jest kolejnym po n . Dlatego jest dobrze mówić o „funkcji”, bo od razu jest jasne, że ten $k(n)$ też jest w N i jest jeden jedyny. Kolejka nie rozwidla się.

A skąd wiesz, że nie będzie cykli?

Jeszcze nie wiem. Ale kiedy powiem: „jest jeden element, który nie jest kolejny po nikim” zwykłego kółka (czyli zamkniętego cyklu) uniknąłem. Kolejka w formie litery O jest już wykluczona. Muszę jeszcze wykluczyć możliwość „wpadnięcia w kółko”, czegoś w formie litery Q czyli O z ogonkiem. Na przykład ciąg jeden dwa trzy cztery pięć trzy cztery pięć trzy cztery pięć byłby tego typu. Ale postanowię, że funkcja k jest różnowartościowa, dwa odmienne elementy nie mogą lądować na tym samym kolejnym. W ostatnim przykładzie dwa i pięć miały tę samą kolejną liczbę trzy. A teraz będzie to niemożliwe.

Powoli zaczyna mi się to układać w głowie, ale nie rozumiem dwóch rzeczy. Czemu mówisz „jest jeden element, który nie jest kolejny po nikim” zamiast po prostu powiedzieć „jedynek jest pierwszym elementem”?

To by była tylko nazwa. I może być myląca, bo jak mi się zechce, to „pierwszym elementem” liczb naturalnych zrobię zero. Czasami to jest pożyteczne.

A dlaczego ta komplikacja z „kolejnym” (widziałam w Internecie, że nazywano go „następnikiem”), czy nie można powiedzieć „n plus jeden”?

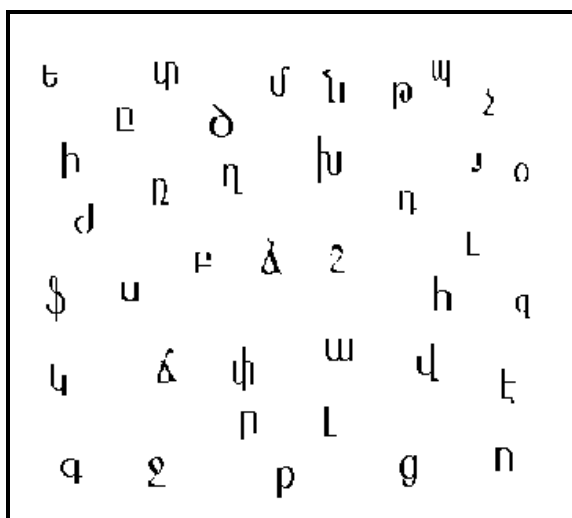
Można. Ale gdy zaczniesz babrać się z tym plusem i zastanawiać się co to znaczy, dojdiesz do wniosku, że taniej i prościej będzie zostawić dodawanie na boku. Nie łap się za dwie miseczki z jedzeniem, najpierw dla psa, potem dla kota i nie będzie zamieszania.

No to już rozumiem dwa pierwsze aksjomaty. Jest na \mathbf{N} funkcja nazwana „bierz kolejny element” i tylko jeden element nie jest jej wartością – i ta funkcja jest różnowartościowa. A co to za historia z tym trzecim warunkiem, że „to jest najmniejszy możliwy zbiór określony przez dwa poprzednie warunki”?

Ktoś przez czystą złośliwość mógłby podrzucić dodatkowo nieskończony ciąg liczb całkowitych. Albo milion takich ciągów. Lepiej od razu sobie zastrzec: „kolejka to jest to właśnie, bez żadnych dodatków

A nie dałoby się zrobić tego wszystkiego rysunkowo? Położyć kolejne elementy jeden za drugim?

Czemu nie? Popatrz na to, możesz poustawiać sobie wszystko w kolejce.



Rysunek 1: Szukanie kolejki.

Co to takiego?

Nie podoba ci się? A to umiałabyś ustawić w kolejce?



Rysunek 2: Znowu szukanie kolejki.

No tak, tu sprawa jest prosta.

No widzisz, nie ma linii, ale potrafisz sobie wyobrazić linię łączącą te elementy. Czyli nie ma potrzeby wpychać liczb w geometrię, musimy tylko zrozumieć zasadę konstrukcyjną. Lepiej nie wywoływać obcych duchów. Jak arytmetyka, to arytmetyka.

Skąd u ciebie te obrazki? Co to za alfabet na pierwszym z nich?

Ormiański. To są dwa poprawne dowody na fałszywe twierdzenia. Czasami pokazuję, że ormiańskie dzieci są inteligentniejsze od polskich i używam pierwszej kartki, a jak chcę udowodnić, że wszystko jest na odwrót, wyciągam drugą.

Śłuchaj, chyba potrafię powtórzyć to mojej siostrzenicy, ale nie chciałbyś dać jej lekcji o tym?

Czemu nie? Sto dwadzieścia złotych.

Co?! A za co?

Za zmianę zawartości głowy.

Ale mnie wytłumaczyłeś za darmo!

Moja wada charakteru.

Czy nie sądzisz, że to drogo za pół godziny rozmowy?

A ile siostrzenica płaci jak ją boli gardło i idzie do laryngologa?

No... nigdy nie myślałam o tym.

Słuchaj, możemy zrobić dobry interes. Jak przyjmiesz moją cenę to dam ci upust za wytłumaczenie liczb zespolonych. Za pięćdziesiąt złotych wyjaśnię co trzeba.

Myślałam, że liczby zespolone są dużo trudniejsze...

Dla dobrego specjalisty to żaden kłopot zagmatwać cokolwiek. Ale ja je robię szybko, solidnie i tanio. No to jak?

A co trzeba będzie kupić? Dwa duże zeszyty?

Nie, tylko dobry cyrkiel i linijkę.

To ja porozmawiam o tym z siostrą. Masz komórkę?

Mam, ale nie pamiętam numeru. Czy możesz go znaleźć na mojej stronie internetowej?